

## ОТЗЫВ

официального оппонента Метлова Константина Леонидовича на диссертацию Расковалова Антона Александровича «Нелинейные возбуждения в магнетиках со спиральной и полосовой доменной структурой», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.3. Теоретическая физика.

Основы теории микромагнетизма заложены в знаменитой работе Ландау и Лифшица 1935-го года: микромагнетизм — теория поля для зависящего от пространственной координаты  $r$  векторного поля намагниченности  $M(r)$  с квадратичным по полю гамильтонианом и дополнительным ограничением на модуль вектора поля  $|M| = \text{const.}$  Это ограничение является ключевым, оно делает теорию микромагнетизма нелинейной (допускающей существование стабильных локализованных в пространстве возбуждений — солитонов, как динамических, так и топологических) и, судя по тому, что активное исследование этой модели ведётся уже почти 100 лет, практически неисчерпаемой. Количество полученных за это время численных и приближенных решений (в том числе и имеющих значительное прикладное значение) необозримо, но вот точных решений реалистичных микромагнитных задач очень мало (наверное несколько десятков). Результаты диссертационной работы существенно дополняют это множество. Как правило, каждое из таких точных решений служит фундаментом для целого ряда приложений магнетизма. А конкретно, рассматриваемые в работе нелинейные спиновые волны на фоне неоднородной намагниченности **исключительно актуальны** в контексте активно развивающейся сегодня магноники, нацеленной на применение спиновых волн для цифровой и аналоговой обработки высокочастотных сигналов. Отсюда же следует и **практическая значимость** работы. Нужно подчеркнуть, что кроме непосредственного получения точных солитонных решений, автором проведен подробнейший анализ их свойств. Причём, как самих по себе, так и во взаимодействии с особенностями фоновой доменной структуры. Этот анализ также содержит множество самостоятельных новых результатов.

**Новизна и оригинальность** работы определяется тем, что полученные в ней точные солитонные решения не были ранее известны. Для их нахождения автором была разработана модификация метода обратной задачи рассеяния — процедура «одевания» частных решений с помощью задачи Римана на торе, решение которой представлено в терминах эллиптических функций, отражающих периодичность фоновой доменной структуры. Причём, решение этой задачи — процесс не автоматический, а во многих случаях предполагает угадывание решений промежуточных (возникающих в процессе «одевания») матричных уравнений. Впервые (с использованием аналога метода изображений) точно решена нелинейная задача о динамике намагниченности в



полубесконечном магнетике и аналитически исследовано взаимодействие солитонов (на неоднородном фоне магнитной спирали) с его границей.

**Достоверность результатов** работы обусловлена корректным использованием современных методов математической физики, а также выполненной автором непосредственной проверкой полученных точных решений путём их подстановки в оригинальные уравнения. Многие результаты также проверены предельными переходами к известным классическим моделям.

Диссертация состоит из введения, содержащего также литературный обзор, и четырёх основных разделов, в которых изложены оригинальные результаты автора. Её завершают заключение, список литературы из 125 наименований, дополненный отдельным списком журнальных статей автора по теме диссертации из 21 наименования, а также приложение по технике работы с эллиптическими функциями, которые широко используются в работе. Общий объем диссертации составляет 241 страницу, включая 45 рисунков.

Во **введении** проведен краткий литературный обзор по методам получения точных решений уравнений Ландау-Лифшица, раскрыта важность рассматриваемой проблемы; сформулированы цели и задачи исследований; уточнены достоверность и область применения полученных результатов, их новизна; перечислены положения, выносимые на защиту.

В **первом разделе** получены точные решения для нелинейных возбуждений на фоне полосовой доменной структуры в ферромагнетике с анизотропией типа лёгкая ось. Записано статическое решение для этой доменной структуры и проведено его исследование на устойчивость в линейном приближении относительно малых деформаций. Показано, что полосовая доменная структура требует дополнительной стабилизации, источником которой служат силы, выходящие за рамки предположений рассматриваемой модели. Тем не менее, в реальных магнетиках конечного размера существование стабильной полосовой структуры является хорошо известным экспериментальным фактом. Рассматриваемая модель вполне способна дать количественные оценки энергии и профиля возбуждений полосовой структуры при некотором (определённом экспериментально) её периоде. В этом разделе автором подробно описан метод одеяния, позволяющий получать многосолитонные точные динамические решения уравнений Ландау-Лифшица на фоне периодической доменной структуры. Выведенные здесь формулы часто используются и в следующих разделах. Получены аналитические выражения для прецессионных солитонов и подробно обсуждается вызванная их присутствием деформация доменной структуры. Описан процесс генерации солитонов при помощи локально приложенного магнитного поля.

Во **втором разделе** рассмотрены возбуждения на фоне полосовой доменной структуры в модели двухосного ферромагнетика. Наличие второй оси моделирует магнитостатическое взаимодействие между магнитными момента-



ми в структуре, которое (в отличие от ранее рассмотренной модели) уже вполне способно стабилизировать статическое решение. В остальном, структура данного раздела аналогична структуре предыдущего. Пространственно-временное распределение намагниченности в солитоне получается тоже очень похожим, с той лишь разницей, что в этом разделе за счёт дополнительной анизотропии равновесный тип доменных стенок в статическом решении (на фоне которого возникают солитоны) всегда блоховский.

В **третьем разделе** рассматриваются солитоны в полубесконечном магнетике с анизотропией типа «лёгкая плоскость» и поверхностным эффективным полем, моделирующим нанесённый на поверхность слой антиферромагнетика. Для решения данной задачи используется аналог метода изображений, сводящий её к задаче о бесконечном магнетике, но с выборкой (зеркально симметричных, относительно границы) решений, так, чтобы всегда удовлетворялись граничные условия. Исследовано взаимодействие солитонов и бризеров с границей образца. В конце раздела показано, что рассмотренная модель связана с задачей о возбуждениях полубесконечного хирального магнетика на фоне магнитной спирали посредством калибровочного преобразования.

В **четвёртом разделе** получены решения для бризеров и многосолитонных состояний в хиральной среде с взаимодействием Дзялошинского-Мория, анизотропией типа «лёгкая ось» и приложенным внешним магнитным полем. В качестве фона для формирования солитонов выбирается статическое решение в виде магнитной спирали. Динамика намагниченности тогда отображается на уравнение  $\text{sine-Gordon}$ , для которого решения на периодическом фоне тоже могут быть получены методом «одевания». Автором подробно проанализирована нелинейная динамика двухкинкового решения на фоне магнитной спирали. Рассмотрено поведение подвижных и неподвижных бризеров. Вычислено (резонансное) поглощение энергии СВЧ излучения спиральной структурой с пиками поглощения, соответствующими формированию возбуждений. Рассмотрены сценарии генерации кинков и бризеров с помощью импульсного магнитного поля. В конце раздела обсуждается применимость полученных результатов к описанию солитонов в мультиферроиках, которые также как и хиральные магнетики характеризуются отсутствием центра инверсии. В таких слабых ферромагнетиках (почти антиферромагнетиках) хиральностью можно управлять при помощи приложенного внешнего электрического поля.

Перечисленные выше, а также другие результаты, составляющие основу диссертационной работы, являются новыми и актуальными, вносят важный вклад в теорию магнитных солитонов.

Автореферат достаточно полно отражает содержание диссертационной работы и результаты, выносимые на защиту. Результаты и выводы представлены в 21-й научной статье в известных рецензируемых международных (Chaos, Solitons and Fractals, Annals of Physics, Low Temperature Physics) и



российских (Теоретическая и математическая физика, Журнал вычислительной математики и математической физики, Журнал экспериментальной и теоретической физики, Физика твердого тела, Физика металлов и материаловедение, Фундаментальные проблемы современного материаловедения, Известия РАН: Серия физическая) журналах, что значительно превосходит требования, предъявляемые к публикации результатов диссертаций на соискание степени доктора физико-математических наук. Результаты многократно докладывались (сделано более 20-ти докладов) на престижных научных конференциях, исследования автора поддержаны различными научными фондами («Династия», РФФИ, РНФ), стипендией Президента РФ. Все исследования проведены на высоком математическом уровне и демонстрируют выдающуюся квалификацию соискателя.

Однако, как и в любом серьезном исследовании, в диссертации можно отметить ряд недостатков, которые вызывают следующие вопросы:

1. По положению 5, выносимому на защиту: *“Спектральные разложения интегралов движения позволяют трактовать любое возбужденное состояние существенно нелинейной и неоднородной доменной структуры двухосного ферромагнетика в терминах идеального газа солитонов и магнонов.”* В принципе, это обычная ситуация для представления решений в рамках обратной теории рассеяния, когда дискретные собственные значения в спектре вспомогательной задачи соответствуют солитонам, а непрерывные — линейным волнам. Однако, существует ли доказательство, что так представляются все решения? Вообще, гарантирует ли метод обратной задачи рассеяния нахождение всех решений исходного нелинейного уравнения для любых начальных условий (возбуждённого состояния)? Даёт ли он их конкретно для уравнения Ландау-Лифшица двухосного ферромагнетика на фоне одномерной периодической доменной структуры?
2. Всё-таки название некоторого набегавшего (на размере всей системы) смещения доменных границ “сдвигом доменной структуры”, мне кажется, не совсем удачным. Оно может существенно запутать читателя для которого “сдвиг” ассоциируется со словами “параллельный перенос”. В работе же речь идёт о растяжении доменной структуры (на правом конце  $\chi \rightarrow +\infty$  доменные стенки остаются на старых местах, а на левом  $\chi \rightarrow -\infty$  приобретают некоторое смещение  $\Delta$ ) при возбуждении в ней солитонов.
3. На Рис. 1.9 функция  $\Theta(\tilde{\chi}, t)$  в максимумах между точками ① и ② визуально не гладкая (хоть и непрерывная). Действительно ли у решения



теряется гладкость в этих (и некоторых других) точках или это артефакт построения графика? К какому классу функций принадлежит  $\Theta(\tilde{\chi}, t)$  ?

4. Рис. 1.13 подписан как “Процесс перемагничивания доменной структуры...” но общая намагниченность в процессе показанной деформаций доменной структуры не меняется. Мне кажется, этот процесс лучше было бы назвать не перемагничиванием, а (динамическим) коллапсом полосовых доменов.
5. По положению 7, выносимому на защиту: Как можно приложить (импульсное) магнитное поле к одному из доменов внутри геликоидальной доменной структуры в объёмном безграничном образце? А если есть граница (образец в виде тонкой плёнки), тогда необходим учёт поверхностной (магнитостатической, как минимум) энергии.
6. Решение для полосовой доменной структуры (1.4), служащее основой для многих расчётов в работе, фиксирует определённую хиральность всех доменных границ. Но рассматриваемая плотность энергии хирально инвариантна. Значит возможна ситуация, когда хиральность *всех* доменных границ изменится на противоположную, и ситуация, когда поменяет знак хиральность только *некоторых* границ. Как это отразится на полученных в работе решениях для прецессионных солитонов?
7. Связанный с предыдущим вопрос: в случае динамики гелимагнетика (рассмотренной в Разделе 4 на основе уравнения sine-Gordon) бризер состоит из кинка и анти-кинка. С другой стороны, в гелимагнетике одна хиральность выделена, а значит можно ожидать, что статические и динамические свойства кинков и анти-кинков будут разными? Эта асимметрия как-то проявляется в полученных результатах?
8. После формулы (2.1) ссылка на “приближение Винтера” мне кажется излишней, поскольку в рассматриваемом одномерном случае формула  $\mathbf{H}^{(m)} = -4\pi M_1$  является точным решением магнитостатической задачи. Приближённой она становится при учёте зависимости намагниченности от времени (поскольку выводится на основе *статических* уравнений Максвелла) либо при (выходящем за рамки одномерной модели) небольшом искривлении стенки в оставшихся двух измерениях.
9. Формула  $p = -iZ(i\nu, 1) = \tan \nu$  перед Рис. 1.3, вообще говоря, справедлива только в интервале  $-\pi/2 < \nu < \pi/2$ . Этого достаточно, чтобы полностью воспроизвести квадратичный закон дисперсии, но при  $|\nu| > \pi/2$  требуются дополнительные оговорки для выбора однозначной ветви этой функции.

10. Есть и ряд незначительных опечаток: в формуле (1.10)  $x \rightarrow \chi$ ; повсеместно не хватает пробела в выражениях с  $\text{Im}$  например  $\text{Im}p(u) > 0$  (эту мелочь несложно скорректировать исправлением соответствующего макроса в  $\text{\LaTeX}$ , но она очень раздражает); пропущена скобка в выражении для  $\kappa$  в тексте после формулы (2.7).

Приведенные выше вопросы и замечания не ставят под сомнение основные выводы диссертационной работы и не влияют на оценку достоверности, важности и новизны представленных в ней результатов. Учитывая актуальность темы диссертационного исследования, научную новизну и практическую ценность, считаю, что диссертация **«Нелинейные возбуждения в магнетиках со спиральной и полосовой доменной структурой»** выполнена на высоком уровне и является законченной научной работой, содержащей точные аналитические решения ряда важнейших задач современной теории магнетизма, которая полностью соответствует требованиям пп. 9-14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», а ее автор, Расковалов Антон Александрович, заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.3.3. Теоретическая физика.

Официальный оппонент,  
доктор физико-математических наук (01.04.07),  
ведущий научный сотрудник ФГБНУ «Донецкий Физико-Технический  
Институт им. А.А. Галкина»,  
телефон: +7 (949) 305-28-00,  
e-mail: metlov@donfti.ru,  
адрес: 283048, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 72.

12 октября 2025 г.



Метлов Константин Леонидович

Подпись заверяю:  
Учёный секретарь  
ФГБНУ «Донецкий физико-технический  
институт им. А.А. Галкина»  
Е.А. Пилипенко

